

## **IMÁGENES: UN RECURSO RENTABLE PARA APRENDER GEOMETRÍA**

Barrantes López, M.<sup>1</sup>; Balletbo Fernández, I.<sup>2</sup>; Fernández Leno, M.A.<sup>3</sup>

**Recibido:** agosto de 2016

**Aceptado:** noviembre de 2016

### **RESUMEN**

Los medios audiovisuales de comunicación están provocando en los alumnos, y en la sociedad en general, grandes cambios en sus formas de percibir y en sus procesos mentales debido al paso de una cultura escrita a una cultura audiovisual.

Las investigaciones y las experiencias actuales nos muestran que la utilización de las imágenes puede hacer que los alumnos aprendan una mayor cantidad de contenidos matemáticos de una forma más significativa.

En este trabajo desarrollamos algunas propuestas tanto con imágenes fijas o en movimiento que ayudan en la adquisición de los conceptos geométricos y hacen comprender a los alumnos la validez de la Geometría.

### **PALABRAS CLAVE**

Enseñanza, Geometría, Fotografías, Películas, Secundaria.

### **SUMMARY**

The audiovisual media are having on students, and society in general, big changes in their ways of perceiving and their mental processes due to the passage of a written culture to a media culture.

The current research and experiences show how that the use of pictures, can make students learn a greater amount of mathematical content in a more meaningful way.

In this work we develop some proposals with fixed or moving images that help in the acquisition of geometric concepts and make students understand the validity of geometry.

### **KEYWORDS**

Teaching, Geometry, Photography, Films, Secondary.

---

<sup>1</sup> Doctor en Matemáticas. Titular de Univer. Departamento de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Facultad de Educación. Univer. de Extremadura. E-mail: barrante@unex.es

<sup>2</sup> Máster Univ. en Invest. en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias Exper., Sociales y Matemáticas por la Univ. de Extremadura. Máster en Educación Superior por la Universidad Autónoma de Asunción. Docente de la UNP, UNI y UNA. E-mail: ipsjb@yahoo.es

<sup>3</sup> Ingeniero de Telecomunicación, Máster en Formación del Profesorado y Máster Univ. en Invest. en la Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias Exper., Sociales y Matemáticas por la Univ. de Extremadura. Profesor de Educación Secundaria. E-mail: marcolpzlpz@hotmail.com

## 1. REFLEXIONES SOBRE LAS IMÁGENES

Las investigaciones y las experiencias actuales (González, 1997; Bueno y Monteoliva;1993; Barrantes 2003) nos muestran que la utilización de las imágenes puede hacer que los alumnos aprendan una mayor cantidad de contenidos matemáticos de una forma más significativa.

El profesor debe estar preparado para poder obtener nuevas maneras de desarrollar la enseñanza, adecuando las actividades ordinarias a los medios con los que cuente en su aula. Éste puede utilizar las imágenes de una forma didáctica o bien como instrumento de consulta.

El uso de las imágenes requiere una preparación y diseño, a priori, por parte del profesor, de forma que los alumnos puedan llegar a donde éste pretende y no se pierdan en contenidos, actividades o divagaciones que no son del interés del aprendizaje o la competencia que se quiere alcanzar.

Por ello, el profesor debe planificar las imágenes a utilizar, su finalidad, los momentos precisos en los que van a ser empleadas y la evaluación de la eficacia didáctica de dicho recurso una vez usado.

De todo el amplio espectro de materiales que aporta la tecnología actual, teniendo en cuenta la etapa en la que el profesor va a trabajar, nos centramos en este trabajo en las imágenes fijas, como es la fotografía, y las imágenes en movimiento de videos y películas.

## 2. LAS FOTOGRAFÍAS COMO MATERIAL DIDÁCTICO

Las fotografías, además de instrumentos de conocimiento, nos sirven para comunicarnos de una manera muy completa y muy acorde con el contexto en el que vive actualmente el alumno, rodeado de gráficos, iconos y signos.

La fotografía combina muy bien los aspectos educativos con los estéticos y a su vez los relaciona con la vida cotidiana.

Es evidente la relación que existe entre la fotografía y la Matemática, y en particular con la Geometría. Conceptos como paralelismo, simetría, razón áurea, perspectiva, proyección, escala, proporción, ritmo, etc. pueden ser bien expresados mediante la imagen fija.

La forma de los seres animados e inanimados parece seguir leyes matemáticas que los humanos han intentado descifrar a lo largo del tiempo ¿Por qué es tan abundante en la naturaleza la forma pentagonal? ¿El modo en que crecen o se mueven los seres vivos es a veces la razón de su forma?

Todas las formas geométricas de dichos seres son bien representadas mediante las fotografías: las formas pentagonales de las flores, la hexagonal de los cristales de la nieve o la simetría de la mariposa, etc.

Vamos a definir nuestra idea de fotografía matemática como *“aquella en la que aparece algún concepto matemático o un objeto que se pueda relacionar con algún concepto matemático”*. Muchas fotografías, pensemos en una foto de una catedral, pueden sugerir muchos conceptos matemáticos, pero normalmente nuestras fotografías son minimalistas, en el sentido de que solamente destacan, claramente, un concepto matemático. El mundo está lleno de formas geométricas, de objetos y lugares con sugerencias matemáticas. Sólo se precisa una mirada matemática que los descubra y sea capaz de plasmarlo con una máquina.

La fotografía es un recurso que puede ser de gran ayuda para el trabajo matemático. Son útiles y se deben utilizar en investigaciones de aula, rutas matemáticas, para la visualización, percepción e intuición espacial y en la relación de la Geometría con el arte (Barrantes, 2003; Meavilla, 2007).

La idea general es, como siempre, poner al alumno frente a una situación problemática. El profesor pretende motivar al alumno de forma que utilice todo su bagaje matemático, desarrolle la competencia lingüística, y exprese sus nociones sobre la belleza y el arte mediante la utilización de la fotografía.

La obtención de una fotografía matemática es para el alumno, la realización de un problema, que en principio no tiene una solución clara ni estrategia evidente. En los momentos de realización de las fotografías, el alumno observa y debe tener en cuenta todo su conocimiento matemático inmediato y de otras materias como son el medio natural y social, el arte, conocimientos fotográficos, etc. para construir la estrategia concreta que le lleve a la solución. Para la realización de las fotografías, el alumno debe explorar el mundo que le rodea e interrelacionar la geometría con las demás áreas. El propio proceso fotográfico incluye procesos de interés relacionados con las matemáticas.

La realización de fotografías desarrolla la capacidad de observar, analizar y sintetizar del alumno, fomentando su percepción con visión matemática de la vida cotidiana. El alumnado desarrolla una nueva forma de expresión, como es la fotografía, que no es contemplada en el currículo.

Las actividades en el aula serían:

*a.-) Actividades de preparación.*

Estas actividades están relacionadas con la observación de imágenes de internet o prensa escrita donde encontramos fotografías matemáticas que nos muestran la realidad que nos rodea e invitan a la reflexión.



Figura 1. Paralelas en las gradas

El alumno busca contenidos matemáticos en estas imágenes, es decir, se les enseña a observar las fotografías con mirada matemática y a seleccionar aquellas imágenes que destacan, de manera principal, un contenido matemático. Por ejemplo, en la foto de la figura 1 se destaca claramente, de una sola mirada, el contenido “paralelas”, aparte de otros que no son tan significativos.

La actividad puede ser realizada por los alumnos formando grupos y deben buscar fotos digitales o en revistas sobre un tema general, como pueden ser: tipos de rectas, triángulos, cuadriláteros, otros polígonos, prismas, cilindros, pirámides,... para, posteriormente, hacer una puesta en común donde estudiemos la idoneidad de las fotos acordes con nuestros objetivos de que sean matemáticas y destaquen un concepto.

Esta actividad enseñará al alumno cómo son las fotos que queremos que realice por sí mismo en las distintas actividades que vamos a proponerles a continuación.

#### b- *Sus fotografías*

Pasamos a la etapa en la que el alumno, individualmente o en grupo, realiza sus propias fotografías matemáticas. Estas fotografías van acompañadas de una ficha en la que consta.

- *Contenido que se quiere trabajar con la fotografía*
- *Una foto más amplia para poder localizar el lugar donde se encuentra el motivo fotografiado.*
- *Breve descripción del lugar oral o por escrito.*
- *Lema que represente a la fotografía en la que se juega con el lenguaje ordinario y las matemáticas, de forma que se obtiene una frase ingeniosa y graciosa.*
- *Actividades diseñadas por el alumno relacionada con la fotografía y propias del curso al que pertenecen.*
- *Opcionalmente, se puede montar la foto enmarcada en una cartulina negra bajo la cual aparece el lema sobre un fondo rectangular blanco.*

En la figura 2, vemos una fotografía en la que se destacan rectángulos que parecen estar en relieve al lado de la vista general de la plaza donde se ha obtenido el detalle y, debajo, el título dado por el alumno.



Figura 2. Título: Geofachada espacial  
Fotografía y vista general del motivo (Plaza alta de Badajoz)

Los alumnos pueden realizar un álbum relacionado con alguna zona de su ámbito diario como puede ser: el instituto, el barrio o alguna zona específica como un parque, un museo,...

Estas actividades ya se realizan en algunos centros de Primaria y Secundaria, y en algunos se celebran concursos de fotografía matemática que finalizan con una exposición fotográfica como actividad última. En las referencias finales apuntamos algunas páginas web relativas a este tema.

#### c- *Exposición fotográfica.*

Para que el profesor, o grupo de profesores, organice un concurso fotográfico en el centro donde trabaja, deben tener en cuenta las siguientes recomendaciones para que la actividad salga bien.

- *Elegir el tema.* El concurso fotográfico puede ser temático, por ejemplo, el deporte en la escuela, un día normal en el centro escolar, triángulos en el barrio, fotografía no sexista,...

- *Selección del lugar* donde se van a hacer las fotografías y *establecer un calendario* con fechas de realización, entregas del trabajo, exposición,...
- *¿Qué hacer?* Es primordial que el alumno tenga las ideas claras sobre qué tiene hacer exactamente. Una reunión general sería deseable para que se les expliquen todos los pormenores del concurso y el calendario establecido.
- *Elección de fotografías.* Una vez entregados los trabajos fotográficos de los alumnos, sería conveniente elegir aquellas fotos o grupos de fotos que son más significativas para montar en la exposición, salvo que se decida montar todas. Si se hacen muchas, es preferible una selección para que la exposición gane en calidad.
- *Montaje de la exposición.* Hay que decidirse si agrupan las fotos por temas geométricos: fotos de cuadrados, triángulos..., o por zonas visitadas, por ejemplo, si la exposición es de fotografías del centro escolar se pueden montar fotos de las aulas, del patio o el gimnasio.
- *Los lemas de las fotografías* de la exposición pueden ser construidos entre todos. Unos alumnos suelen ser más creativos que otros y esto mejora la exposición, en mayor medida, que si cada uno construye su propio lema.
- *Cuaderno de actividades.* El profesor, o grupo de profesores, lo elabora para la exposición, de manera que los alumnos que la visiten interactúen con ellas y no sean meros sujetos pasivos que miran fotografías (Fernández-Aliseda; Muñoz y Porras, 1999). Dicho cuaderno puede incluir una breve explicación de la exposición, actividades generales referentes a la misma y específicas sobre alguna fotografía en particular. Por último, se puede incluir un breve cuestionario acerca de la opinión del alumno sobre la exposición y si se ha producido, o no, un cambio actitudinal hacia las matemáticas. Este cuestionario puede ser aprovechado posteriormente, mediante el recuento de respuestas, para hacer ejercicios de estadísticas basados en datos reales de la exposición.

[Véase figura en la siguiente página]



Figura 3. Fotografías matemáticas.

- *El montaje* puede ser clásico, se montan las fotos ampliadas sobre fondo negro con el lema correspondiente, o bien, se pueden utilizar medios informáticos como pantallas grandes, en la que vayan apareciendo las fotografías de forma espontáneas, u ordenadores donde el alumno visitante de la exposición elige qué quiere ver. El cuaderno de actividades descrito anteriormente también se puede implementar en dichos ordenadores.

### **3-IMÁGENES EN MOVIMIENTO**

Cuando hablamos de imágenes en movimiento nos estamos refiriendo a las películas que, mediante los diversos sistemas de proyección, podemos ofrecer al alumnado.

Constituyen, por tanto, un medio más del que nos podemos servir para hablar del contenido matemático.

El material existente con la tecnología actual ha aumentado considerablemente, las posibilidades de internet hacen que podamos conseguir suficiente material didáctico de interés, basados en la historia de las matemáticas y otros contenidos como cálculo, medida, geometría o simples experiencias de otros profesores que nos enseñan cómo trabajan sus alumnos en el aula. Otra opción son las películas comercializadas y que también podemos encontrar en librerías especializadas en material escolar.



El profesor debe hacer una indagación en bibliografía e internet para poder encontrar materiales animados que sean interesantes y desde los que se pueda realizar una reflexión de aula, a partir de un buen guión de trabajo elaborado, sobre la exposición de películas o segmentos de ellas.

Actualmente, mediante internet, se pueden encontrar películas didácticas que tratan muchos de los contenidos matemáticos de la Educación Primaria o Secundaria.

Estos contenidos son nuevos o clásicos que han sido digitalizados, bien por instituciones, universidades, centros de enseñanza o, simplemente, por algún profesor o maestro amante de las matemáticas.

Dentro de los contenidos antiguos digitalizados podemos encontrar series famosas como los capítulos de la colección *Ojo Matemático*, o bien el ya famoso corto de Walt Disney titulado *“Donald en el país de las Matemáticas”*, series de Historias de las Matemáticas,...en las que muchos de sus contenidos son adaptables a Primaria o Secundaria. También las televisiones ofrecen películas dedicadas a las matemáticas de interés para los alumnos que pueden ser visionadas o bajadas de las páginas de internet correspondientes. Por ejemplo, en la página de RTVE encontramos algunos capítulos de la serie la aventura del saber (Universo matemático).

Una de las lecturas y película básicas en la enseñanza aprendizaje de la geometría es Flatland, que ha sido traducido al español como Planilandia basada en una novela antigua escrita en 1884 por el matemático Edwin A. Abbott. Esta novela nos introduce dentro de la piel y las reflexiones de A. Cuadrado, un habitante del mundo bien llamado Planilandia.

El libro transcurre, esencialmente, en dos partes importantes. La primera parte es un pequeño tratado que “Cuadrado”, abogado y habitante de Planilandia, nos hace a nosotros, los habitantes de Espaciolandia, de cómo es su mundo, como viven, cómo se mueven, cómo se organizan...

Es un mundo totalmente plano, en dos dimensiones. Solo existe lo ancho y lo alto. Sus habitantes son figuras geométricas: triángulos, cuadrados, pentágonos... en un principio, regulares. Y, además, muy estratificada socialmente. Un lugar donde los padres rinden homenaje y respeto a sus hijos (que no al revés), donde tener más lados te da más importancia y posición social y donde la mujer, una línea recta, es casi un ser denostado por el hecho de no carecer de razón y solo poseer emociones.

En la segunda parte, “Cuadrado” recibe la visita de una [esfera](#) tridimensional, a la cual no puede comprender hasta ver la tercera dimensión por sí mismo. La relación entre los dos se invierte cuando la mente de "Cuadrado" se abre a nuevas dimensiones y trata de convencer a la esfera de la existencia de una cuarta dimensión espacial, una quinta, una sexta y así sucesivamente.

"Cuadrado" termina en prisión en Planilandia por sus intentos de corromper el pensamiento establecido acerca de las dos únicas dimensiones. Impotente, queda encerrado anhelando que un visionario se encuentre algún día con sus memorias.



Figura.5. Flatland, dos versiones en 2007.

El libro ha sido llevado al cine en varias ocasiones. Las dos más antiguas son Flatland (EE. UU., 1965), película de animación dirigida por Eric Martin y de duración 12 minutos y Flatland (1982), un cortometraje de 22 minutos dirigido por el matemático Michelle Emmer.

Posteriormente a estos dos cortos, en el año 2007, aparecen dos nuevas versiones. La primera de ellas bajo el nombre de Flatland: The Movie un cortometraje de animación dirigido por Dano Johnson y Jeffrey Travis con una duración de 34 minutos. Flatland: The Movie es un corto con un presupuesto aceptable que cuenta y utiliza asesores educativos como John Benson, del NCTM (National Council for Teaching Mathematics), y el Dr. Thomas Banchoff, profesor de Geometría en la ilustre Brown University, entre otros. Este grupo de matemáticos cuidan que los conceptos matemáticos sean correctos y creíbles.

La segunda versión, titulada Flatland: the film, tiene una duración de 1 hora 39 minutos y ha sido dirigida por Ladd P. Ehlinger Jr. Fue realizada con menos costos de producción y para un mercado no educativo, pero no deja de ser un testimonio de la posibilidad de hacer una producción independiente. De las dos podemos encontrar versiones subtituladas en español.

Por otra parte, hay también en Internet (Youtube) una serie de contenidos útiles para la enseñanza como son los segmentos, que muestran experiencias de profesores y su enseñanza específica: trabajos concretos con los niños en el aula, cortos elaborados sobre algún contenido concreto... que aunque no tienen gran valor artístico, pues son caseros, sí lo tienen desde el punto didáctico para la enseñanza o el refuerzo de contenidos

Si bien las películas (llamamos película a cualquier contenido visual de los que hemos hablado anteriormente) permite tratar los contenidos de una manera muy diferentes a como lo hace un libro de texto, hay que tener cuidado, pues las proyecciones pueden resultar una actividad muy pasiva para los alumnos.

Algunos consejos generales para que su utilización sea más eficaz serían los siguientes:

-Podemos hacer que el alumnado visiona la película correspondiente en general para tener una idea clara de su contenido pero la forma más adecuada de utilizarla es mediante los segmentos.

Llamamos *segmentos* a aquellas partes de la película que es interesante porque trabaja un contenido concreto. Por ejemplo, Pato Donald en el País de las Matemáticas es un corto cuyo objetivo es mostrar la importancia de las matemáticas en general. Para cumplir este objetivo, la película se puede subdividir en distintos segmentos que pueden ser utilizados en Primaria o Secundaria, como pueden ser: la relación de las matemáticas y la música, las formas geométricas en los objetos de la vida ordinaria y profesional, el número áureo en el arte y la naturaleza, las matemáticas y los juegos, la idea de infinito en la mente....



Los cortos sobre experiencias, materiales, etc., realizados por los mismos docentes, suelen ser suficientemente explícitos y breves para poder proyectarlos y aprovecharlos en una sola sesión.

- Antes de llevarlo al aula, hay que determinar qué parte se va a usar, por qué y para qué. El profesor necesita verlo completo para determinar qué segmentos son adecuados para los alumnos. Por ejemplo, los documentales sobre la historia de las Matemáticas pueden ser muy interesantes para nosotros y aburridos para los alumnos, pero su proyección en segmentos cortos puede ser muy provechosa, por ejemplo, proyectar solamente la necesidad de medir en Egipto por las inundaciones del río Nilo, el segmento que habla sobre Pitágoras y los pitagóricos, etc.
- Debe haber, antes de la emisión, una pequeña explicación por parte del profesor sobre qué trata el segmento y qué objetivos o competencias se quieren conseguir con la proyección.
- Debe plantearse alguna actividad antes de la proyección, a realizar posteriormente de la visualización, para evitar la pasividad de ver una película simplemente por verla. Dicha actividad no debe ser tan agobiante que haga que el alumno no la vea relajadamente, y se sienta oprimido por lo que debe realizar. Por ejemplo, el profesor puede proponer a los alumnos una opinión sobre lo que van a ver, relacionada con las matemáticas. La actividad se realizará una vez finalizado el segmento y el alumno no puede tomar apuntes durante la proyección, para desarrollar su capacidad de retención y de síntesis.
- En general, para el buen aprovechamiento del vídeo o de los distintos segmentos proyectados, hay que diseñar actividades que permitan a los estudiantes estar atentos antes, durante y después de las visualizaciones.

Las temáticas generales sobre las que podemos encontrar películas o cortos abarcan prácticamente todo el currículo escolar, sobre todo, si se amplía la búsqueda en internet a otros idiomas. En este caso, el profesor es quien debe seleccionar los buenos segmentos atendiendo a las necesidades de su aula, como pueden ser segmentos de introducción, de refuerzos, para realizar tareas, para mostrar la relación de las matemáticas con la historia, el arte, la vida cotidiana, etc.

#### **4- CONCLUSIÓN**

Las impresiones visuales son esenciales para la adquisición de los conocimientos por lo que es necesario dar mayor importancia a las imágenes que la que actualmente tiene en el currículo actual.

Tenemos que resaltar la importancia de los modelos visuales para la adquisición de conceptos geométricos y para fomentar la habilidad de los alumnos a la hora de dar razones lógicas que expliquen la validez de las fórmulas geométricas. Las imágenes son un material didáctico muy interesante para utilizar en el aula, ya que combina muy bien aspectos educativos y estéticos.

Todas las actividades con imágenes son importantes porque fomentan el trabajo interdisciplinar; unen las matemáticas con el arte y la historia; haciendo que los alumnos estudien su cultura en el propio medio y que el aprendizaje del contenido matemático, intuitivo y experimental, sea significativo.

Como reflexión final, tanto estudiantes para profesores como profesores deben concienciarse que los recursos tecnológicos suponen, cada vez más, un proceso de innovación y de adecuación de la metodología y de las actividades utilizadas por el profesor en el aula. Por ello, hay que estar preparados para poder adecuar la enseñanza y las actividades a realizar con los recursos tecnológicos que tengamos en el aula y los que nos van llegando paulatinamente.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barrantes, M (2003). Caracterización de la enseñanza/aprendizaje de la Geometría en Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, Nro. 24, pp. 15-36.
- Bueno, A. y Monteoliva, M. (1993): *Fotografía y Matemáticas: Una experiencia en la Axarquía*. *Epsilon*, Nro. 27, pp. 63-68.
- Fernández-Aliseda, A.; Muñoz, J. y Porras, A. (1999). Aprovechamiento didáctico de la actividad : *Fotografía y matemáticas*. *Suma*, Nro.31, pp. 97-104
- González, E. (1997): *Fotografía y matemáticas*. *Aula de Innovación educativa*, Nro. 58, pp. 15-19.
- Meavilla, V. (2007) *Las matemáticas del arte: Inspiración Ma(r)temática*. Ed Almuzara. España.
- Moreno, P. (2002). *Ritmos, Matemáticas e imágenes*. Ed. Nivola. Madrid.
- Solando, J.M. (2011). Las Matemáticas en los anuncios. *Número. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Nro. 78, pp.33-46.

## MUESTRA DE PÁGINAS WEB SOBRE:

### **Concursos de fotografías matemáticas**

<http://www.iescarrenmiranda.com/matematicas/matefoto/>

<http://mateblog.educabarrie.org/concurso-de-fotografia-matematica/>

<http://www.pradosantodomingo.net/intranet/joomla25/index.php/galeria-de-imagenes/category/8-concurso-fotografia-matematica>

<http://www.pradosantodomingo.net/intranet/joomla25/index.php/servicios-y-actividades/concurso-de-fotografia-matematica>

<http://matesyfotosaitana.blogspot.com.es/>

[http://www.educacion.gob.es/exterior/centros/ginerdelosrios/es/concursos/paulo\\_abrantes/pauloabrantes.shtml](http://www.educacion.gob.es/exterior/centros/ginerdelosrios/es/concursos/paulo_abrantes/pauloabrantes.shtml)

### **Películas y Series**

#### **La aventura del saber (Universo Matemático)**

<http://www.rtve.es/television/la-aventura-del-saber/documentales/universo-matematico/>

#### **Ojo matemático (1990).**

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLE40A8541278D184>

<http://aprender-ensenyar-matematicas.blogspot.com.es/2010/11/ojo-matematico-1-y-2.html>

#### **Flatland (1982)**

<https://www.youtube.com/watch?v=A7DIhigATpl>

<https://www.youtube.com/watch?v=aZDnGnKk1yA>

<https://www.youtube.com/watch?v=BrhCu0pVQJE>

#### **Pato Donalds en el País de las Matemáticas.**

[www.youtube.com/watch?v=ZprMmcxwvTQ](http://www.youtube.com/watch?v=ZprMmcxwvTQ)

#### **Flatland the film (2007)**

[www.youtube.com/watch?v=Mfglluny8Z0](http://www.youtube.com/watch?v=Mfglluny8Z0)

#### **Flatland the movie (2007) Página oficial**

<http://www.flatlandthemovie.com/>